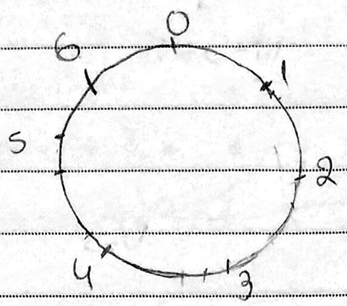
23/10/2017.

$\boxed{n=7}$

$+, -, \cdot, /$

<u>σώμα</u>



$[1]_7 [1]_7 = [1]_7$
$[2]_7 [4]_7 = [1]_7$
$[3]_7 [5]_7 = [1]_7$
$[6]_7 [6]_7 = [1]_7$

→ <u>Δακτύλιος</u> των ακεραίων.

$a \cdot b = 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$

$a=0$ ή $b=0$

Διάταξη: $a, b \in \mathbb{Z}$, $a > b \leftrightarrow a-b \in \mathbb{N}$

$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a>b$ ή $a=b$ ή $b>a$.

$a > b \Leftrightarrow a+\gamma > b+\gamma$.

$a>b$ και $\gamma \in \mathbb{N} \Rightarrow a\gamma > b\gamma$.

$a \geq b \leftrightarrow a-b \in \mathbb{N}_0$

$$|a| = \begin{cases} a, & a \in \mathbb{N}_0 \\ -a, & a \notin \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Αρχή της καλής διάταξης:

Κάθε μη κενό υποσύνολο S του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, δηλ. υπάρχει $b \in S$ τέτοιο ώστε $b \leq a$ για $\forall a \in S$.

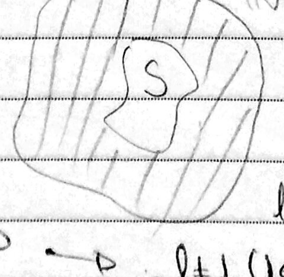
Θεώρημα: (Μαθηματική Επαγωγή)

Έστω S ένα υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσ. αριθμών τέτοιο ώστε: i.) $1 \in S$ και.

ii) $\forall n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

Τότε το $S = \mathbb{N}$

$\mathbb{N} - S$



i.) $\mathbb{N}-S = \emptyset \Rightarrow \mathbb{N} = S$

ii.) $\mathbb{N}-S \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{N}-S \subseteq \mathbb{N}$

Άρα $\mathbb{N}-S$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω το $l \Rightarrow$ $l \in \mathbb{N}-S$ και $l \leq a$ $\forall a \in \mathbb{N}-S$

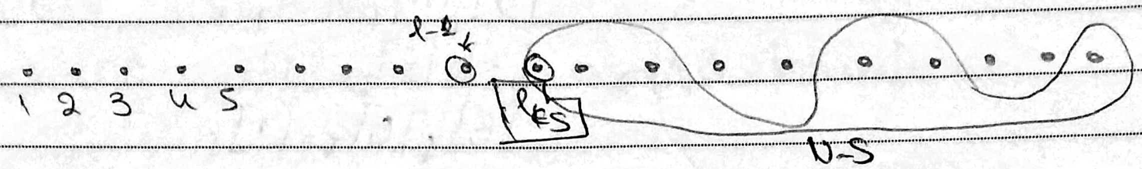
Άρα $\mathbb{N}-S = \emptyset$ → $l \neq 1$ $(1 \in S)$ $l-1 \in \mathbb{N}$. $l-1 \in S$ (γιατι $l-1 \in \mathbb{N}-S$ τότε $l \leq l-1$). ΑΤΟΠΟ!

ii) $\Rightarrow l-1 \in S \Rightarrow (l-1+1) \in S \Rightarrow l \in S$

$S\subseteq \mathbb{N}$: i.) $1\in S$

ii.) αν $n\in S \Rightarrow n+1\in S$ $\Big\}$ $S=\mathbb{N}$

$\mathbb{N}-S=\emptyset$



$l\in\mathbb{N}-S$ αφού $1\in S$. Άρα $l>1 \Rightarrow$
$l-1\in\mathbb{N}$

$l-1\in\mathbb{N}$
$l-1\in S \Rightarrow \boxed{l\in S}$ Άτοπο!

Θεώρημα: Έστω $P(n)$ μια πρόταση που αναφέρεται στον φυσικό αριθμό n τέτοιο ώστε η $P(1)$ αληθής και ισχύει αν $P(n)$ αληθής τότε $P(n+1)$ αληθής. Τότε η $P(n)$ είναι αληθής $\forall \mathbb{N}$

$S=\{n\in\mathbb{N} \mid P(n)$ αληθής$\}=\mathbb{N}$

$S\subseteq\mathbb{N}$

$1\in S$

Αν n αληθής $\Rightarrow n+1$ αληθής $n+1\in S$ $\Big\} \Rightarrow S=\mathbb{N}$

Άσκηση: Δείξτε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$P(n)=$ ισχύει ότι $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$P(1)$: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$ αληθής

Έστω $P(n)$ αληθής δηλ. $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$1+2+\dots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow P(n+1) \text{ αληθής.}$$

Άρα η πρόταση ισχύει $\forall\, n\in\mathbb{N}$

Άσκηση:

Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$1+3+\dots+(2n-1) = n^2$

$P(n)$ ισχύει ότι $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$

$P(1)$: $1 = 1^2$ ισχύει ✓

Έστω $P(n)$ αληθής δηλ. $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

$1+3+5+\dots+(2n-1)+2n+1 = n^2+2n+1$

$= (n+1)^2$ ✓

Άρα $P(n)$ αληθής

Η πρόταση $1+3+\dots+(2n+1)=n^2$ ισχύει $\forall n\in\mathbb{N}$

Ανισότητα του Bernoulli:

Αν $0<x<1$: $(1-x)^n > 1-xn$, $\forall n\geq 2$

$P(2)$: $(1-x)^2 > 1-2x$. $= 1+x^2-2x > 1-2x$.

Έστω $P(n)$ αληθής δηλ. $(1-x)^n > 1-nx$

$(1-x)^{n+1} = (1-x)^n \underset{\substack{\text{θετικό} \\ 0<x<1}}{(1-x)} > (1-nx)(1-x) = 1-nx-x+nx^2$

$= 1-(n+1)x + \underset{\text{κ' n κ' } x^2 \text{ θετικό αφού τα πετάω}}{nx^2} > 1-(n+1)x$.

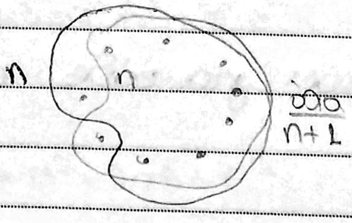
Άρα $P(n+1)$ αληθής

Η πρόταση $P(n)$ ισχύει $\forall n\geq 2$

πχ $P(n)$. Κάθε σύνολο από n φοιτητές του Μαθ Ιωαννίνων έχει τον ίδιο Α.Μ.

$P(1)$: αληθής

Έστω $P(n)$ αληθής



Δεν ισχύει το $P(2)$.